



**Kingdom of Morocco**  
**HASSAN II ACADEMY OF SCIENCES AND TECHNOLOGY**

**CHALLENGES AND NEW PERSPECTIVES  
IN MATHEMATICS**

**November 14-15, 2019**

Réalisation : **AGRI-BYS S.A.R.L.**

Impression : novembre 2019

Imprimerie Lawne : 11, rue Dakar, Océan, 10040-Rabat, Maroc

# Thursday, November 14

## Opening Session

**9:00-9:30 Pr. Omar Fassi-Fehri**  
*Permanent Secretary of the Hassan II Academy of Sciences and technology*  
**Opening address**

## Session I

**9h30-10:45 Jean Pierre Demailly**  
*Grenoble Alpes University - Institut Fourier*  
*French Academy of Sciences - France*  
 **$L^2$  estimates in complex analysis and geometry**

**10:45-11:00 Coffe break**

**11:00-12:15 Nizar Touzi**  
*Ecole Polytechnique de Paris - France*  
**Recent results on backward SDEs and connection with stochastic differential games**

**12:00 Lunch**

## Session II

**14:00-15:15 Arnaud Debussche**  
*ENS Rennes, IUF member - France*  
**Approximation-diffusion, équations cinétiques et limites fluides stochastiques**

**15:15-16:30 Mohamed Erraoui**  
*Chouaib Doukkali University El Jadida - Morocco*  
**On Some processes pinned at random time**

**16:30-16:45 Coffe break**

**16:45-17:25 Soukaina Douissi**  
*Cadi Ayyad University - Marrakech*  
**AR(1) processes driven by a second chaos white noise : Berry-Esséen bounds for the quadratic variation and parameter estimation**

# Friday, November 15

## Session III

**9:00-10:15**    **Nicolas Burq**  
*Paris-Sud University, IUF member- France*  
**Equations aux dérivées partielles et Aléa**

**10:15-10:30**    Coffe break

**10:30-11:45**    **Zoubida Mghazli**  
*Ibn Tofaïl University Kénitra - Morocco*  
**Contributions dans la modélisation mathématique de la biodégradation de la matière organique**

**12:00**            Lunch

## Session IV

**14:00-15:15**    **Kristian Seip**  
*Norwegian University of Science and Technology*  
*Norwegian Academy of Science and Letters - Norway*  
**Some glimpses of the Riemann zeta function**

**15:15-16:30**    **Zouhair Mouayn**  
*Sultan Moulay Sliman University Béni Mellal - Morocco*  
**Coherent states for higher Landau levels**

**16:30-16:45**    Coffe break

**16:45-17:25**    **Youssef Omari**  
*Mohammed 5 University in Rabat*  
**Riesz bases of reproducing kernels in small Fock spaces**

## Challenges and New Perspectives in Mathematics

November 14-15, 2019

### Abstracts

#### Equations aux dérivées partielles et Aléa

Nicolas Burq, Université Paris-Sud

On présentera dans cet exposé un domaine de l'analyse qui a émergé au cours des 15 dernières années: l'étude des équations aux dérivées partielles à données aléatoires. Ce domaine partage avec les EDP stochastiques (EDPS) certains points (le mélange des probabilités et de l'analyse des EDP en particulier), mais se distingue notablement par de nombreux autres points. Pour l'étude des EDPS, la plupart du temps, l'aléa est un ennemi dans la mesure où il force le mathématicien à étudier des objets aléatoires très peu réguliers (bruits divers). L'objectif ici est plutôt de tirer parti de l'aléa pour aller plus loin que les diverses théories déterministes. Les situations typiques où cette approche s'est avérée fructueuse sont des cas où on sait que du point de vue déterministe la situation se passe mal: croissance de normes pour les fonctions propres du Laplacien ou plus généralement pour des solutions d'EDP, explosion des solutions d'EDP non linéaire,... On cherche alors à montrer que même si on sait que de telles situations existent (car on sait construire des exemples particuliers), dans un grand nombre de cas (pris au hasard selon certaines mesures de probabilités), on peut montrer que ces mauvais extrêmes n'existent pas (estimations presque sûres, existence et/ou diffusion presque sûre, etc).

Je présenterai dans cet exposé des cas où la présence d'aléa permet effectivement d'améliorer le cadre déterministe. Je donnerai aussi des exemples de questions typiques d'EDP pour lesquels on peut espérer que ce type d'approche puisse s'appliquer.



## Approximation-diffusion, équations cinétiques et limites fluides stochastiques

Arnaud Debussche, ENS Rennes

Considérons une équation différentielle du type

$$\frac{dx_t^\epsilon}{dt} = F(x_t^\epsilon, m_t^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} G(x_t^\epsilon, m_t^\epsilon)$$

contenant des termes aléatoires  $m_t^\epsilon = m(\epsilon^{-2}t)$  où  $m$  est un processus stationnaire. Sous certaines hypothèses sur  $m$  (mélange) et  $G$  (centrage), lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $x^\epsilon$  converge vers la solution d'une équation stochastique (approximation-diffusion). La justification rigoureuse de ceci se fait par la méthode de la fonction test perturbée introduite par Papanicolaou, Strook et Varadhan.

D'autre part, dans de nombreuses situations, des équations cinétiques décrivant le comportement de particules au niveau mésoscopique contiennent un petit paramètre (dans le cas de l'équation de Boltzmann,  $\epsilon$  est le libre parcours moyen):

$$\partial_t f^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} a(v) \cdot \nabla_x f^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} Q(f^\epsilon)$$

et converge vers une limite macroscopique (équation fluide) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En collaboration avec Julien Vovelle, nous avons étudié des problèmes dans lesquels ces deux limites interviennent simultanément. Le point de départ est une équation cinétique contenant des termes aléatoires dans les "scaling" ci-dessus. Il est en effet raisonnable que les bruits au niveau mésoscopique ne soient pas des bruits blancs mais des bruits ayant une longueur de corrélation non nulle. Nous avons généralisé la méthode de la fonction test perturbée à ce cadre et obtenons ainsi rigoureusement des équations aux dérivées partielles stochastiques à la limite. Si le temps le permet, je parlerai de notre dernier résultat qui montre comment obtenir les équations de Navier-Stokes incompressibles stochastiques à partir des équations de Boltzmann.

*$L^2$  estimates in complex analysis and geometry*

**Jean Pierre Demailly, Université Grenoble Alpes  
Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques**

Many important problems of complex analysis and geometry can be studied by means of Hilbertian techniques. For instance, Hörmander's  $L^2$  estimates provide very sharp results for the solutions of Cauchy-Riemann equations, and lead to deep applications in analytic or algebraic geometry. The talk will also focus on recent holomorphic extension theorems and their applications.

**AR(1) processes driven by a second chaos white noise :  
Berry-Esséen bounds for the quadratic variation and parameter  
estimation**

**Soukaina Douissi, Cadi Ayyad University - Marrakech**

This talk will be about an interesting topic that links probability theory and statistics which is : "statistical inference for stochastic processes". We will see how a powerful tool from stochastic analysis which is Malliavin calculus combined with Stein's method can be employed to obtain speed of convergences in law with important applications in statistics. More specifically, we study the asymptotic behavior of the quadratic variation of observations from an AR(1) model driven by a second-chaos white noise. We derive an upper bound for the convergence in law of the quadratic variation then we apply the results obtained to study the estimation of the mean-reversion parameter of the model including the consistency of the chosen estimator and the speed of its convergence in law to a Gaussian random variable in total variation distance. Numerical simulations using the statistical software R illustrate the theoretical results. This is a joint work with Frederi G. Viens, Fatimah Alshahrani from Michigan State University and Khalifa Es-Sebaiy from Kuwait University.



## **On Some processes pinned at random time**

**Mohamed Erraoui, University Chouaib Doukkali -El Jadida**

Our first goal is to give precise definition of some Markov processes pinned at random time. Our second task is to establish the Markov property of these processes with respect to their completed natural filtrations and their usual augmentations. This property will be crucial for the right-continuity of the completed natural filtrations of such processes.

## Contributions dans la modélisation mathématique de la biodégradation de la matière organique

Zoubida Mghazli, Université Ibn Tofail - Kénitra

Laboratoire Interdisciplinaire en Ressources Naturelles et en Environnement

La modélisation mathématique et ses applications sont utilisées depuis les anciennes civilisations. L'écologie microbienne est une branche des sciences beaucoup plus récente et trouve ses racines en médecine. Les fondements de la cinétique microbienne proviennent de la cinétique enzymatique en chimie, et le premier modèle convaincant liant le taux de croissance bactérienne à un substrat limitant  $S$  a été introduit par Monod (1942) qui a suggéré que la croissance bactérienne soit représentée par deux paramètres,  $m$  et  $k_s$ , puis a formulé l'équation  $\frac{dx}{dt} = \mu(S)x$  avec  $\mu(s) = \frac{\mu_m S}{k_S + S}$  où le paramètre  $k_S$  représente l'affinité des microorganismes avec le substrat  $S$ ,  $\mu_m$  la vitesse maximale de croissance et  $x$  est la concentration de la biomasse en croissance sur le substrat  $S$ . En combinant cette dynamique avec celle du substrat limitant dans un bioréacteur, il a défini le premier modèle du chémostat. Beaucoup de travaux sur différents modèles d'équations différentielles ordinaire (EDO) ou de systèmes d'EDO liés à ces dynamiques et leurs analyses ont été réalisés depuis. Ces modèles consistent en général à suivre l'évolution dans le temps de la population totale, en ignorant sa répartition dans l'espace. Dans cet exposé, nous présenterons deux modèles spatialisés traitant de la biodégradation de la matière organique. Le premier concerne la bioremédiation de l'eau polluée par les nitrates, par l'introduction de bactéries agissant sur les nitrates. Nous développerons un modèle de deux types de bactéries, celles qui adhèrent aux parois et celles qui restent libres appelées planctoniques, en tenant compte des variations spatiales, de la diffusion des deux types de bactéries, ainsi que du fait que les bactéries libres peuvent avoir tendance à se fixer sur les parois et les bactéries adhérentes peuvent se détacher sous l'effet de la force de l'écoulement. Une analyse mathématique et des simulations numériques seront présentés. La deuxième contribution concerne un modèle à deux-étapes de la dynamique bactérienne de la biodégradation anaérobie (sans oxygène) des déchets dans une décharge considérée comme un milieu poreux. Nous étudions l'écoulement des deux fluides, lixiviat et biogaz, combiné avec les systèmes spacialisés de la biodégradation. Les modèles décrivant ces problèmes consistent en un système d'équations différentielles ordinaires pour les réactions biologiques / chimiques couplé à un système d'équations aux dérivées partielles (milieu poreux). Nous proposons une approche prenant en compte des phénomènes de diffusion dans l'activité bactérienne. Le modèle final est entièrement un système d'EDP dont l'analyse mathématique et des simulations numériques seront présentés.

## Références

- [1] M. ABAALI, Z. MGHAZLI: *Mathematical modelling of biodegradation in situ - application to biodenitrification* à paraître dans *Computers and Mathematics with Applications*, 2019.
- [2] S. OUCHTOUT, Z. MGHAZLI, J. HARMAND, A. RAPAPORT, Z. BELHACHMI: "Analysis of an anaerobic digestion model in landfill with mortality term", à paraître dans *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2019.
- [3] Z. BELHACHMI, Z. MGHAZLI, S. OUCHTOUT: *Modeling and analysis of leachate flow in the anaerobic biodegradation of waste in a landfill*, soumis.

## Coherent states for higher Landau levels

**Zouhair Mouayn, Sultan Moulay Sliman University - Béni Mellal**

We construct coherent states for higher Landau levels and we describe their properties, implications in different areas of mathematical analysis and their potential applications in quantum physics. Some new directions of research are also discussed.

## Riesz bases of reproducing kernels in small Fock spaces

Youssef Omari, Mohammed 5 University in Rabat

We give a complete characterization of Riesz bases of normalized reproducing kernels in the small Fock spaces  $\mathcal{F}_\varphi^2$ , the spaces of entire functions  $f$  such that  $fe^{-\varphi} \in L^2(\mathbb{C})$ , where  $\varphi(z) = (\log^+ |z|)^{\beta+1}$ ,  $0 < \beta \leq 1$ . The first results in this direction are due to Borichev-Lyubarskii who showed that  $\varphi$  with  $\beta = 1$  is the largest weight for which the corresponding Fock space admits Riesz bases of reproducing kernels. Later, such bases were characterized by Baranov-Dumont-Hartman-Kellay in the case when  $\beta = 1$ . The present talk answers a question in Baranov et al. by extending their results for all parameters  $\beta \in (0, 1)$ . Our results are analogous to those obtained for the case  $\beta = 1$  and those proved for Riesz bases of complex exponentials for the Paley-Wiener spaces. We also obtain a description of complete interpolating sequences in small Fock spaces with corresponding uniform norm. This is a joint work with K. Kellay.

- [1] A. BARANOV, A. DUMONT, A. HARTMANN, K. KELLAY. *Sampling, interpolation and Riesz Bases in small Fock spaces*. J. Math. Pures Appl. (9) 103 (2015), no. 6, 1358–1389.
- [2] Y. BELOV, T. Y. MENGESTIE, K. SEIP. *Discrete Hilbert transforms on sparse sequences*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 103 (2011), no. 1, 73–105.
- [3] A. BORICHEV AND YU. LYUBARSKII, *Riesz Bases of reproducing kernels in Fock type spaces*, J. Inst. Math. Jussieu 9 (2010), no. 3, 449–461.

## Some glimpses of the Riemann zeta function

**Kristian Seip, Norwegian University of Science and Technology**

Still largely concealing the truth about the distribution of the prime numbers, the Riemann zeta function  $\zeta(s)$  remains a deep source of interesting problems across different mathematical disciplines. After a review of some of the basic features of the theory of  $\zeta(s)$ , I will be quite selective and report on some personal encounters with  $\zeta(s)$  from recent years.

**Recent results on backward SDEs and connection with stochastic differential games**

**Nizar Touzi, Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques Appliquées**

We provide new existence and uniqueness results for second order backward stochastic differential equations in random horizon. Remarkably, the integrability under a nonlinear expectation plays an important role even in the standard backward SDE setting, and allows to improve previously known well posedness results. As a first application to stochastic differential games, we consider the Principal-Agent problem which is the corner stone for the modeling of optimal incentive schemes to account for moral hazard in economics. The problem is formulated as a Stackelberg game or two-stage optimization problem. We provide a systematic method which reduces this game to a standard stochastic control problem. As a second application, we provide an extension of the Lions planning problem in mean field games, and provide some solutions based on the second order backward SDE representation.



