

Modélisation mathématique et finance

**Présentation de
Mme El Karoui-Schwartz
par M. Rachid Benmokhtar Benabdallah
(Directeur de Séances)**

Madame Nicole El Karoui Schwartz est professeur des universités à l'Université Paris-VI et détachée à l'Ecole Polytechnique. Elle a obtenu son doctorat d'Etat es-Sciences Mathématiques en 1971. Auparavant, elle fût lauréate de l'Ecole Normale Supérieure en 1964. Elle a été successivement professeur de mathématiques à l'Université du Maine, à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay, à l'Université Paris-VI et puis à l'Ecole Polytechnique. Ses recherches, qui se sont déroulées pour une grande part au Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris-VI, ont porté d'abord sur les processus stochastiques puis sur les outils théoriques du contrôle stochastique. En 1989, et à la suite d'un semestre qui était passé à la banque, elle s'intéresse aux mathématiques financières tant du point de vue pratique que théorique et depuis c'est devenu son domaine de recherche principal. Elle a toujours gardé un lien avec le milieu professionnel, depuis ce temps là, comme consultante dans les grandes banques françaises. Elle a créée à l'Université Paris-VI, en collaboration avec l'Ecole Polytechnique, le parcours Finances du Master Probabilités et Applications. Elle a aussi contribué à créer un autre Master à Shanghai qui ouvrira ses portes l'année prochaine.



Ses thèmes de recherche sont: l'optimisation stochastique, la finance mathématique avec les modèles de taux d'intérêts, la surcouverture, les changements de numéraires et les mesures de risques, les équations stochastiques rétrogrades et les applications à la finance et à l'optimisation. Elle a de nombreuses publications dans les meilleures revues de probabilités et de mathématiques financières.

Elle a été plus active dans le développement très récent lié au financement privé de la recherche en finances, notamment la création de la Fondation du Risque dans la Chaire Risques Financiers, dont elle est responsable, en liaison avec la Société Générale. Par ailleurs, elle est membre du Conseil de l'Agence d'Evaluation de la recherche et de l'Enseignement Supérieur.



Je voulais dire combien j'étais impressionnée par le parterre qui est ici et je voudrais saluer le Secrétaire Perpétuel de l'Académie Hassan II des Sciences et Techniques, les nombreux académiciens et toutes les personnalités qui sont là ainsi que mes collègues et les étudiants ici présents. El Karoui est un nom tunisien, mon mari est tunisien, et je dois dire que je connais la Tunisie mieux que le Maroc; mais je me sens toujours chez moi de ce côté-là de la méditerranée et je suis particulièrement contente d'être ici sous cette coupole qui est absolument magnifique.

Je vais éviter de vous parler des équations stochastiques rétrogrades, de contrôle stochastique et autres belles choses qui m'occupent assez souvent et je vais essayer de vous parler un petit peu donc de mon expérience, même si je la rendrais un peu plus abstraite, dans le monde de la finance et d'un certain nombre d'éléments de réflexion que j'ai pu avoir dans ce domaine.

Le titre de la conférence qui est «Promenade aléatoire dans les marchés financiers» est un peu trop vaste et on va s'intéresser aux marchés financiers du risque. D'une certaine manière, une grande partie de ce que je vais évoquer aura des rapports avec la gestion des risques financiers. Je voulais souligner le fait que je suis professeur de mathématiques appliquées et, du point de vue culture, plutôt spécialiste des probabilités. Tout ça pour dire, en fait, que je ne suis pas une experte de la finance; j'ai abordé la finance par un bout extrêmement technique, puis il se trouve qu'il y a un secteur très limité de la finance qui fait beaucoup de mathématiques appliquées. Je ne suis pas une spécialiste tous azimuts des marchés financiers. La finance est un monde extrêmement vaste et on ne va pas couvrir tous les aspects de la finance; on va en choisir un et on va expliquer un certain nombre de choses autour de ça.

La question qui nous préoccupe, au moins dans l'expérience que j'ai pu avoir depuis une vingtaine d'années, est en fait l'évolution de la perception des risques financiers, de leur gestion depuis une trentaine d'années. Cette évolution est liée à la transformation du contexte international qui a démarré dans les années 70'. D'une certaine manière, on peut dire que l'on vit dans un monde

qui est plus libéral globalement que juste après la guerre et face à ce système plus libéral, et donc plus compétitif où les choses bougent plus, les gens ont rencontré des difficultés face aux fluctuations et il y a eu une réponse des marchés financiers en proposant notamment de nouveaux produits financiers et une nouvelle manière d'aborder les choses et c'est un peu ce dont je veux parler aujourd'hui.

Pourquoi ces choses nous ont interpellés, et pourquoi ça fait sens d'en parler à l'intérieur de ces locaux prestigieux d'une académie des sciences? Parce que c'est un endroit où dans un domaine très spécifique il y a eu une rencontre entre des problèmes pratiques financiers et des outils théoriques extrêmement sophistiqués, et mon impression est que si ces outils n'avaient pas existé un certain nombre de transformations qui ont eu lieu depuis 1973 n'auraient pas pu avoir lieu. Et donc c'est souvent cet aspect là qui m'intéresse beaucoup spécialement. Ces quelques remarques constituent à peu près le plan de mon exposé.

Pour préciser les choses dont je vais parler, il faut rappeler l'évolution des marchés financiers à partir des années 70' parce qu'il y a un certain nombre de dates qui seront particulièrement importantes dans ce cas là. Dans les années 70', il y a eu l'abandon de la parité du dollar avec l'or.

Typologie des risques

- 1 Le risque de marché, évolution défavorable des taux, change, cours des matières premières, ...
- 2 Risque de crédit:
 - 1 Risque de défaillance
 - 2 Risque de dégradation de la valeur de la créance
- 3 Risque de liquidité, surtout en cas de crise
- 4 Risque opérationnel (comme dans toute industrie)
 - 1 Risque de désastre, risque de fraude,
 - 2 Risque technologique
 - 3 Risque juridique

C'est la période aux Etats-Unis (52'-60') où on s'intéresse beaucoup à la gestion de fonds, les portefeuilles sont très connus de tout le monde, les gens placent pas mal leur argent et donc ça motivera les travaux de Black & Scholes et Merton en 1973 dans le monde des options. En fait, Black & Scholes ont écrit un papier ensemble, Merton a écrit un autre, mais les deux papiers arrivaient à des conclusions assez similaires. Dans le monde des options, ils vont introduire l'idée de portefeuille d'autant plus que le système devenait de plus en plus libéral. Cette idée là, qui a reçu un accueil académique mitigé puisque leur papier a été refusé trois fois dans des revues, va recevoir un accueil très important de la part de l'industrie.

En 1973, il y a eu la création du marché de Chicago et là les gens perdaient plein d'argent parce qu'ils ne savaient pas gérer les risques. Black & Scholes



proposent une manière de réduire les risques quand on vend ses options, le vendeur d'options supporte le risque, c'est la philosophie du portefeuille de couverture géré dynamiquement. C'est une sorte de poursuite du marché. Le prix de l'option est la valeur à investir dans le portefeuille, donc il faut trouver la stratégie de portefeuille. Il faut voir qu'il y a une différence entre un prix et une stratégie de couverture; si vous voulez vendre une option, vous donnez un prix et s'il y a preneur la transaction se fera à ce prix là en fonction de l'offre et la demande. Combien il faut acheter de dollars pour couvrir une option d'achat ? Cela n'est écrit nulle part, et ce que vont proposer Black & Scholes c'est une formule qui permet de calculer combien on achète de dollars. Ce qui est intéressant dans ce genre de transformation c'est que là on est en train de passer d'une activité de petite industrie, c'est ce qui se passait sur les options dans le marché de gré à gré, à la création du marché de Chicago qui transforme les choses, il y a beaucoup plus de liquidités, les prix sont beaucoup plus serrés et on n'arrive pas à élaborer en interne des stratégies pour résoudre le problème. Ce sont des idées complètement nouvelles qui vont permettre de répondre à la question et qui vont en fait assurer la création de ce marché des risques.

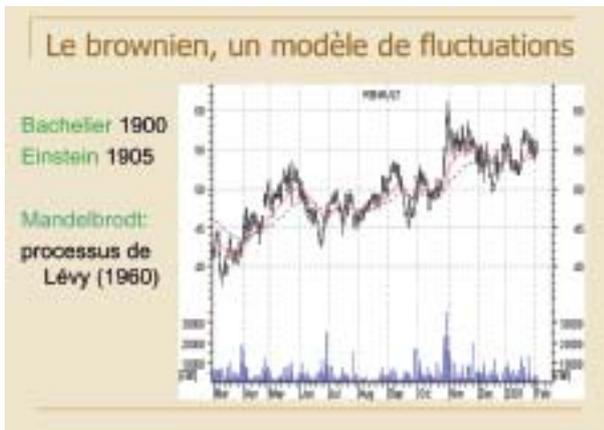
La visualisation du mouvement brownien illustre combien toute l'activité de la finance est complètement indissociable de l'évolution de l'informatique. La première question qui pouvait y avoir c'est qu'il faut faire un calcul et pour cela il faut être capable de développer un modèle qui reproduit ce genre de choses. C'est là que le mouvement brownien apparaît: on est capable, en fait, de générer un processus dont les fluctuations sont importantes. Un mouvement brownien bouge entre un moment t et S_t comme une petite gaussienne de moyenne zéro, c'est du bruit, et la variance est proportionnelle au temps. Avec le brownien, on arrive à capter une partie des fluctuations.

Après la guerre, on est dans la philosophie de Black & Scholes, on modélise les rendements des actifs comme un mouvement brownien avec une tendance, donc c'est la notion de portefeuille qui est importante. Vous avez une certaine quantité de dollars à une date t , puis vous regardez de combien la valeur de votre portefeuille a changé entre t et $(t + dt)$:

$$X_{t+dt} - X_t = dt (S_{t+dt} - S_t)$$

Comme la trajectoire de S n'est pas dérivable, il est difficile à donner un sens à cette expression. C'est le calcul stochastique. C'est ce qu'a fait Paul Levy, Itô et autres entre les années 30' et les année 50'.

Un portefeuille varie au cours du temps de manière infinitésimale, proportionnellement à la quantité (de dollars ou d'actions) multipliée par la variation des choses sur lesquelles vous investissez. Mathématiquement, cela ressemble à une équation différentielle. En fait, juste avant la guerre et juste après la guerre, Itô va montrer qu'on peut faire un calcul différentiel avec ces objets plus compliqués que sur le mouvement brownien, que tout va fonctionner pareil, en tant



compte que les termes d'ordre 2 dans la formule de Taylor sont du même ordre que les termes en dt puisque le calcul différentiel fonctionne mais il a une forme un peu différente, il a un terme de plus et donc il est un peu plus subtile. C'est ce qu'on appelle le calcul d'Itô. En utilisant ces arguments, Black & Scholes montrent que quand on a une option, un flux défini à une date donnée, il est toujours possible de répliquer ce flux par un portefeuille. Cette réplication est possible par l'intermédiaire de fonctions qu'on sait calculer et ces fonctions satisfont ce qu'on appelle une équation aux dérivées partielles (EDP), donc il y a une règle et ça marche. Mais ça relève d'outils plus sophistiqués, si ces outils n'avaient pas été là, on n'aurait pas pu résoudre le problème en question. On retrouve que c'est lié à l'équation de la chaleur, $1/\sigma^2 x^2 u''_{xx}(t,x) + U'_t = 0$, $u(T,x)=h(x)$, ne faisant pas apparaître v qui est le paramètre de l'actif.

Quel est le prix du portefeuille ?

Trois sources de prix :

- > Les marchés organisés pour les produits listés (actions, certaines options sur actions,...),
- > Les brokers pour des produits standards traités de gré-à-gré,
- > Les modèles pour les produits exotiques et plus généralement en absence de prix de marché.

Il est alors possible d'évaluer le portefeuille.

En essayant d'ajuster une stratégie dynamique, on a pu annuler la tendance liée au marché en quelque sorte et réduire l'impact dans une option d'achat du fait que le marché soit haussier ou baissier et ne garder que le risque dû aux fluctuations. Grâce à cette stratégie, on résout le premier problème que rencontraient les marchés, réduire considérablement les risques qu'on supporte quand on vend des produits dérivés. Dans les exemples que je vais vous montrer par la suite:

$$Y_t = \text{valeur portefeuille} \text{ et } Z_t = \text{montant en action} = S_t \delta_t$$

Exemple: on a vendu un call, la valeur de départ est 50 et le prix d'exercice 70, c'est énorme en fait et on essaie de voir qu'est ce qui se passe. Dans le graphique qui est en haut, la ligne bleue représente la valeur de S_t , ça fluctue et ça va bouger, elle part de 50 et à certains moments va bouger beaucoup et redescend près de ce qu'on a garanti à la fin. La ligne rouge qui est au dessus représente la valeur du portefeuille de couverture, et pour savoir si on s'est bien couvert on doit repérer si la valeur terminale du portefeuille de couverture correspond avec le point d'arrivée de la ligne bleue, ce qui prouve que la ligne rouge permet de couvrir exactement ce qu'on a à payer.



Pour bien appliquer la théorie, il faut connaître les paramètres du modèle et pouvoir les ajuster aux paramètres du marché. C'est là que la finance se sépare des statistiques. D'habitude, on fait un modèle et on a des paramètres, et on essaie d'utiliser l'historique des coûts pour calibrer les valeurs des paramètres.

En finances, aujourd'hui, on va chercher la valeur du paramètre de volatilité δ , Black & Scholes. Cela a un gros avantage vous regardez un prix dans le marché, vous inversez la formule et vous obtenez le paramètre δ , et vous recommencez. Du fait que vous procédez ainsi du moment que vous avez le prix de l'option, c'est-à-dire que vous avez une information supplémentaire, même si votre modèle n'est pas parfait, le fait de réajuster tous les jours, vous faites de l'apprentissage; et du coup, de manière extrêmement économique, vous avez un prix, un paramètre et une couverture, vous arrivez à vous en tirer. C'est ce qui avait fait la force de la formule de Black & Scholes et du prix calculé de cette manière. Là, c'était le début de l'histoire, mais dans les

marchés, les choses sont nettement plus compliquées; ils essaient de se couvrir avec les options puisqu'ils savent bien les gérer et l'histoire recommence mais à des niveaux de complexité largement supérieurs.

Exemples de volatilité implicite :

- \$US-Yen (2000-2001) : la courbe jaune représente en fait la volatilité historique correspondant aux moyennes des variations au carré sur 10 jours et la courbe verte sur 50 jours et pour cela elle est beaucoup plus lisse. Donc là on prend les cours, on fait des stades et on regarde comment ça bouge.



- FTSE, indice anglais (1993-2002): la courbe en vert représente la variation de la volatilité implicite.



Ce sont donc là des choses qui bougent pas mal et qui ne sont pas liées à des comportements.

Qu'est ce que le premier bilan de ce qui s'est passé, là on a analysé le comportement d'une personne qui vend un produit, comment il fait pour se couvrir. On est passé d'un risque de marché à un risque de modèle parce que la plupart du temps il y a plusieurs modèles qui pourraient marcher aussi bien et dans les produits compliqués ça a de l'importance. Il y a beaucoup de problèmes en ce moment sur lesquels les gens travaillent : comment on analyse les corrélations, les actifs, en bref tous les problèmes standards et les stades mais abordés

selon un mode nouveau. La philosophie reste la même, d'une certaine manière on arrive à réduire le risque principal, mais il y a beaucoup de risques sur lesquels on ne sait pas faire. La recherche continue et il y a toute une organisation dans ce domaine.

Dans les salles de marchés, le régulateur s'est intéressé à ce nouveau type d'activité et aux nouveaux risques qui sont générés par celle-ci. Dans ces options, on couvre le risque principal, mais par exemple on est très sensible au risque de fluctuation, peut-on faire beaucoup d'argent sur le risque de fluctuation ou pas et comment est-ce qu'on peut provisionner ça? Depuis 1998, il y a des normes réglementaires qui imposent que sur le portefeuille agrégé (l'ensemble des produits vendus), on essaie de faire une mesure de risque de la perte potentielle pour une période à un jour ou à dix jours. Cela a été initialisé par le Comité de Bâle II, et en France où le contrôle est plus important qu'aux Etats-Unis, les banques ont été contraintes en 1998 de proposer un modèle pour calculer la perte potentielle qu'elles pouvaient subir sur leur portefeuille de marché. L'idée c'est que, dans ce contexte là, les risques vont s'annuler les uns les autres suivant les produits et en regard de ces nouveaux risques on va mettre des fonds propres et les adapter le mieux à cette nouvelle activité. Cela a impliqué une grande réflexion sur les risques et sur leur atténuation. Le régulateur a laissé les établissements libres de proposer leurs modèles, moyennant un contrôle régulier de ce qu'ils font. Le contrôle du modèle est surtout à priori, c'est-à-dire qu'on va regarder dans l'année passée quel a été le comportement des indicateurs proposés par la banque face au comportement de son vrai portefeuille. Chaque fois que le portefeuille de la banque dépasse plus de 3 fois les indicateurs qui ont été donnés, la banque est pénalisée et les fonds propres qu'elle devait mettre en regard augmentent de 1-2% voire de manière très significative. Cette technique est validée à posteriori par les résultats qu'elle donne.

Avoir beaucoup de facteurs et arriver à les gérer, ça crée autant de problèmes. Les résultats, même assez approximatifs, sont assez robustes dans la représentativité.

Je voudrais revenir sur les questions de simulation et d'implémentation. Je pense que même si on n'intervient pas dans le monde des actions de manière aussi dynamique la question de l'évaluation pour la gestion des risques pour des structures autres que les structures associées aux salles de marchés, l'un des enjeux que l'on rencontre et qui est extrêmement important c'est à la fois d'être capable de faire de bonnes simulations et de faire de bonnes implémentations dans la représentation des risques. Pour cela, si on s'y prend mal et si on n'est pas assez vigilant, les chiffres que l'on obtient peuvent être très mauvais. Il y a des techniques pas assez compliquées, mais qu'il faut connaître, et qui permettent de rendre les choses infiniment plus équitables.

De manière générale, on est souvent mieux armé pour simuler, représenter et gérer les risques. L'outil informatique est complètement déterminant dans ce cas là, mais ça doit se faire avec des gens qui comprennent ce qu'il faut faire et qui disposent des bons outils pour le faire. Ça concerne des jeunes ingénieurs qui continuent à être recrutés dans les salles de marchés dans beaucoup d'endroits. En fait, il y a un vrai besoin de gens qui soient bien formés pour ces techniques. Dans le monde de la banque, de manière générale, toute l'activité qui va dans la gestion de nouveaux produits doit être indissociable de régulateurs, de suivi des risques, d'une meilleure analyse et d'une meilleure compréhension, etc. Pour cela, on a besoin de gens qui soient de bons mathématiciens qui comprennent ce qu'ils font, qui sont capables de simuler, de proposer des solutions et de vérifier que les solutions qu'on a tiennent la route de manière robuste.

Comme j'ai eu le plaisir, à l'Ecole Polytechnique, d'avoir régulièrement beaucoup d'élèves marocains qui ont bien assimilé la finance, j'en ai conclu, pas seulement parce qu'ils étaient passés par l'Ecole Polytechnique, mais de manière générale, je pense qu'au Maroc on a des atouts; il y a un certain nombre de gens bien formés et sur lesquels on peut se baser pour développer les activités de ce genre. Je pense que c'est un peu l'avenir de l'évolution, dans un monde qui bouge très vite. On s'intéresse en ce moment aux risques financiers, mais il n'y a pas que le risque financier, il y a d'autres risques. Le monde actuel est conscient de ces risques, il doit les gérer. La gestion des risques procède souvent par leur représentation et par leur quantification, et la simulation numérique permet de faire ça à condition de le faire bien.

Je vous remercie de votre attention.

